

-1 p  $\vdash p \wedge r$   
 -2  $\neg(q \wedge r)$   
 3  $q \wedge r$  EN 2  
 4 r EC 3  
 5  $p \wedge r$  II 1,4

-1  $\neg p \wedge q$   $\vdash \neg v \neg p$   
 -2  $\neg p \wedge q \rightarrow \neg v \neg p$   
 3  $\neg v \neg p$  MP 1,2

-1 p  $\vdash r$   
 -2  $p \rightarrow q$   
 -3  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$   
 4 q MP 1,2  
 5  $q \rightarrow r$  MP 1,3  
 6 r MP 4,5

-1  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$   $\vdash \neg q$   
 -2 p  
 -3  $\neg r$   
 4  $q \rightarrow r$  MP 1,2  
 5  $\neg q$  MT 3,4

-1  $\neg p \rightarrow q$   $\vdash p$   
 -2  $\neg q$   
 3  $\neg \neg p$  MT 1,2  
 4 p EN 3

-1  $p \rightarrow q$   $\vdash \neg q \rightarrow \neg p$   
 2  $\neg q$   
 3  $\neg p$  MT 1,2  
 4  $\neg q \rightarrow \neg p$  II 2-3

-1  $\neg q \rightarrow \neg p$   $\vdash p \rightarrow q$   
 2 p  
 3  $\neg \neg p$  "IN" 2  
 4  $\neg \neg q$  MT 1,3  
 5  ~~$\neg \neg q$~~  EN 4  
 6  $p \rightarrow q$  II 2-5

-1  $p \wedge q \rightarrow r$   $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$   
 2 p  
 3 q  
 4  $p \wedge q$  IC 2,3  
 5 r MP 4,4  
 6  $q \rightarrow r$  II 3-5  
 7  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  II 2-6

$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow [( \neg q \rightarrow \neg p ) \rightarrow ( p \rightarrow r )]$

1  $q \rightarrow r$   
 2  $\neg q \rightarrow \neg p$   
 3 p  
 4  $\neg \neg q$  MT 2,3  
 5 q EN 4  
 6 r MP 1,5  
 7  $p \rightarrow r$  II 3-6  
 8  $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$  II 2-7  
 9  $(q \rightarrow r) \rightarrow [(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)]$  II 1-8

-1  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$   $\vdash (p \wedge q) \rightarrow r$   
 2  $p \wedge q$   
 3 p EC 2  
 4  $q \rightarrow r$  MP 1,3  
 5 q EC 2  
 6 r MP 4,5  
 7  $(p \wedge q) \rightarrow r$

-1  $p \rightarrow q$   $\vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$   
 2  $p \wedge r$   
 3 p EC 2  
 4 r EC 2  
 5 q MP 1,3  
 6  $q \wedge r$  IC 4,5  
 7  $(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$  II 2-6

-1  $p \vee q$   $\vdash q \vee p$   
 2 p  
 3  $q \vee p$  ID 1-3  
 4 q  
 5  $q \vee p$  ID 4-5  
 6  $q \vee p$  ED 2-3,4-5

-1  $q \rightarrow r$   $\vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$   
 2  $p \vee q$   
 3 p  
 4  $p \vee r$  ID 3  
 5 q  
 6 r MP 1,5  
 7  $p \vee r$  ID 6  
 8  $p \vee r$  ED 3-4,5-7  
 9  $p \vee q \rightarrow p \vee r$  II 2-8

-1  $p \wedge (q \vee r)$   $\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

2 p EC 1  
 3  $q \vee r$  EC 1  
 4 q  
 5  $p \wedge q$  II 2,4  
 6  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  ID 5  
 7 r  
 8  $p \wedge r$  IC 2,7  
 9  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  ID 8  
 10  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  ED 4-6,7-9

-1  $p \rightarrow q$   $\vdash \neg p$   
 -2  $p \rightarrow \neg q$   
 3  $\neg \neg p$   
 4 p EN 3  
 5 q MP 1,4  
 6  $\neg q$  MP 2,4  
 7  $q \wedge \neg q$  IC 5,6  
 8  $\neg \neg \neg p$  "IN" 3-7  
 9  $\neg p$  EN 8

-1  $p \rightarrow \neg p$   $\vdash \neg p$   
 2  $\neg \neg p$   
 3 p EN 2  
 4  $\neg p$  MP 1,3  
 5  $p \wedge \neg p$  IC 3,4  
 6  $\neg \neg \neg p$  "IN" 2-5  
 7  $\neg p$  EN 6

-1  $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$   $\vdash q$   
 -2  $\neg r$   
 -3 p  
 4  $\neg q$   
 5  $p \wedge \neg q$  IC 3,4  
 6 r MP 1,5  
 7  $r \wedge \neg r$  IC 2,6  
 8  $\neg \neg q$  "IN" 4-7  
 9 q EN 8

-1  $p \leftrightarrow q$   $\vdash p \wedge q$   
 -2  $p \vee q$   
 3 p  
 4  $p \rightarrow q$  EB 1 [elim. bicondional]  
 5 q MP 3,4  
 6  $p \wedge q$  IC 3,5  
 7 q  
 8  $q \rightarrow p$  EB 1 [elim. bicondional]  
 9 p MP 7,8  
 10  $p \wedge q$  IC 7,9  
 11  $p \wedge q$  ED 3-6,7-10

- 1  $p \wedge q$   $\vdash p \wedge s$
- 2  $q \rightarrow r$
- 3  $r \rightarrow s \wedge q$
- 4  $q$  EC 1
- 5  $r$  MP 2,4
- 6  $s \wedge q$  MP 3,5
- 7  $s$  EC 6
- 8  $p \wedge s$  EC 1
- 9  $p \wedge s$  IC 7,8

- 1  $p \rightarrow (q \vee p)$   $\vdash q \vee p$
- 2  $\neg p \rightarrow \neg(r \wedge s)$
- 3  $\neg(r \wedge s) \rightarrow \neg q$
- 4  $q$
- 5  $\neg\neg(r \wedge s)$  MT 3,4
- 6  $r \wedge s$  EV 5
- 7  $\neg\neg p$  MT 2,6
- 8  $p$  EV 7
- 9  $q \vee p$  MP 1,8

$$\vdash (p \wedge s) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow s)]$$

- 1  $p \wedge s$
- 2  $p \rightarrow q$
- 3  $q$
- 4  $s$  EC 1
- 5  $q \rightarrow s$  II 3-4
- 6  $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow s)$  II 2-5
- 7  $(p \wedge s) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow s)]$

- 1  $p \rightarrow q$   $\vdash \neg p$
- 2  $q \rightarrow \neg(s \vee r)$
- 3  $s \wedge t$
- 4  $s$  EC 3
- 5  $s \vee r$  ID 4
- 6  $\neg q$  MT 2,5
- 7  $\neg p$  MT 1,6

$$-1 \quad p \vee q \quad \vdash \neg r \rightarrow s$$

$$-2 \quad q \rightarrow (r \rightarrow s)$$

$$-3 \quad \neg q \rightarrow \neg p$$

- 4  $p$
- 5  $\neg\neg q$  MT 3,4
- 6  $q$  EV 5
- 7  $r \rightarrow s$  MP 2,6
- 8  $q$
- 9  $r \rightarrow s$  MP 2,8
- 10  $r \rightarrow s$  ED 4,4-7,8-9

$$-1 \quad p \wedge q \rightarrow (s \vee t) \quad \vdash r \rightarrow \neg(p \wedge q)$$

$$-2 \quad \neg s \rightarrow \neg r$$

- 3  $r$
- 4  $\neg\neg s$  MT 2,3
- 5  $s$  EV 4
- 6  $s \vee t$  ID 5
- 7  $\neg(p \wedge q)$  MT 1,6
- 8  $r \rightarrow \neg(p \wedge q)$

$$-1 \quad p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \vdash p \rightarrow \neg(p \wedge r)$$

$$-2 \quad r \wedge s \rightarrow \neg(p \wedge r)$$

$$-3 \quad \neg(s \wedge q) \rightarrow \neg p$$

- 4  $p$
- 5  $q \rightarrow r$  MP 1,4
- 6  $\neg\neg(s \wedge q)$  MT 3,4
- 7  $s \wedge q$  EV 6
- 8  $q$  EC 7
- 9  $s$  EC 7
- 10  $r$  MP 5,8
- 11  $r \wedge s$  IC 9,10
- 12  $\neg(p \wedge r)$  MP 2,11
- 13  $p \rightarrow \neg(p \wedge r)$

Ejercicios DEDUCCIÓN NATURAL

MP+EC+IC  
 - 1  $p \rightarrow t$   $\vdash t \wedge r$   
 - 2  $p \wedge q$   
 - 3  $q \rightarrow r$

- 1  $p$   $\vdash t$   
 - 2  $r \wedge q$   
 - 3  $(p \wedge r) \rightarrow t$

- 1  $p \rightarrow t$   $\vdash s \wedge r$   
 - 2  $t \rightarrow q$   
 - 3  $p \wedge r$   
 - 4  $q \rightarrow s$

- 1  $p \rightarrow (q \wedge r)$   $\vdash r \wedge s$   
 - 2  $r$   
 - 3  $s \wedge p$

MP+EC+IC+ID  
 - 1  $p \rightarrow q$   $\vdash q \vee s$   
 - 2  $p \wedge r$

- 1  $p \wedge q$   $\vdash r \wedge s \vee (t \rightarrow q)$   
 - 2  $p \rightarrow r$   
 - 3  $p \rightarrow s$

- 1  $\neg p \wedge s$   $\vdash \neg q \wedge (s \vee t)$   
 - 2  $\neg p \rightarrow r$   
 - 3  $r \rightarrow \neg q$

- 1  $p \vee s$   $\vdash p \vee (q \vee r)$   
 - 2  $(p \vee s) \rightarrow t$   
 - 3  $t \rightarrow q \vee r$

MP+EC+IC+ID+TD  
 - 1  $p \wedge t$   $\vdash q \rightarrow s$   
 - 2  $q \rightarrow (r \wedge s)$   
 - 3  $r \rightarrow (t \rightarrow s)$

- 1  $p \rightarrow q$   $\vdash p \rightarrow t \vee u$   
 - 2  $q \rightarrow s$   
 - 3  $s \rightarrow r$   
 - 4  $r \rightarrow t$

- 1  $\neg p \wedge q$   $\vdash q \rightarrow p \vee t$   
 - 2  $q \vee s \rightarrow r$   
 - 3  $r \rightarrow q \wedge t$

- 1  $\neg \neg q$   $\vdash q \rightarrow t$   
 - 2  $r \wedge q \rightarrow s$   
 - 3  $q \rightarrow r \wedge p$   
 - 4  $s \wedge p \rightarrow t$

EC+IC  
 - 1  $(p \wedge q) \wedge r$   $\vdash p \wedge s$   
 - 2  $q \wedge (t \wedge s)$

EC+IC  
 - 1  $(p \rightarrow q) \wedge r$   $\vdash r \wedge u$   
 - 2  $[(r \leftrightarrow s) \vee t] \wedge u$

... + ED + MT

-1  $p \rightarrow \neg q \quad \vdash \neg p \vee t$

-2  $\neg q \vee r$

-3  $r \rightarrow \neg q$

-1  $p \vee q \quad \vdash t$

-2  $p \rightarrow t$

-3  $q \rightarrow t$

$\vdash t \vee u$

-1  $p \wedge q \rightarrow r \wedge s$

-2  $(p \wedge q) \vee t$

-3  $s \rightarrow t$

-1  $p \rightarrow q \quad \vdash p \rightarrow (t \rightarrow$

$t)$

-2  $r \vee s$

-3  $q \rightarrow (t \rightarrow p)$

... + EN (Reducción al absurdo)

-1  $\neg p \rightarrow \neg(r \vee t) \quad \vdash (p \rightarrow q)$

-2  $\neg q \wedge s$

-3  $s \rightarrow r \vee t$

... + SD

-1  $p \rightarrow q \quad \vdash \neg p$

$\vdash \neg p$

-2  $r \vee s$

-3  $s \rightarrow \neg q$

-4  $\neg r$

... + DM

-1  $p \vee q \quad \vdash r$

-2  $p \rightarrow r$

-3  $q \rightarrow r$